

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сахалинский государственный университет»
Кафедра математики

УТВЕРЖДЕН
на заседании кафедры
«20» мая 2025 г., протокол №9
Заведующий кафедрой
 Самсикова Н. А.

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

Б1.О.12 Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Направления подготовки
09.03.03 Прикладная информатика

Профиль подготовки
Автоматизированные системы обработки информации и управления

Квалификация выпускника
Бакалавр

Форма обучения: очная

г. Южно-Сахалинск
2025 г.

1. Формируемые компетенции и индикаторы их достижения по дисциплине

Код компетенции	Содержание компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
ОПК-1	ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования. ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования. ОПК-1.3. Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.
ОПК-6	ОПК-6. Способен анализировать и разрабатывать организационно-технические и экономические процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования	ОПК-6.1. Знает основы теории систем и системного анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики, методов оптимизации и исследования операций, нечетких вычислений, математического и имитационного моделирования. ОПК-6.2. Умеет применять методы теории систем и системного анализа, математического, статистического и имитационного моделирования для автоматизации задач принятия решений, анализа информационных потоков, расчета экономической эффективности и надежности информационных систем и

2. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1.	Комплексные числа и действия над ними	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы; вопросы к коллоквиуму
2.	Матрицы	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы; вопросы к коллоквиуму
3.	Определители	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы; вопросы к коллоквиуму
4.	Системы линейных уравнений	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы; вопросы к коллоквиуму
5.	Векторная алгебра	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы; вопросы к коллоквиуму
6.	Прямая и плоскость	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам,

			контрольные вопросы; вопросы к коллоквиуму
7.	Линейные пространства	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы; вопросы к коллоквиуму
8.	Многочлены	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы; вопросы к коллоквиуму
9.	Линейные операторы	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы; вопросы к коллоквиуму
10.	Операторы в евклидовом пространстве	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы; вопросы к коллоквиуму

3. Оценочные средства

Тестирование является одним из средств формального контроля качества обучения – методе, основанном на стандартизированных заданиях, которые позволяют оценить знания, умения и навыки испытуемого

Требования к составлению тестового задания

Тесты должны быть построены по методике, обеспечивающей выполнение требований соответствующего федерального государственного образовательного стандарта.

В тестовых заданиях используются четыре типа вопросов:

– **закрытая** форма – является наиболее распространенной и предлагает несколько альтернативных ответов на поставленный вопрос. Тестовое задание, содержащее вопрос в закрытой форме, включает в себя один или несколько правильных ответов.

Закрытая форма вопросов используется также в тестах-задачах с выборочными ответами. В тестовом задании в этом случае сформулированы условие задачи и все необходимые исходные данные, а в ответах представлены несколько вариантов результата решения в числовом или буквенном виде.

Обучающийся должен решить задачу и показать, какой из представленных ответов он получил.

– **открытая** форма – вопрос представляет собой утверждение, которое необходимо дополнить. Данная форма может быть представлена в тестовом задании, например, в виде словесного текста, формулы (уравнения), графика, в которых пропущены существенные составляющие – части слова или буквы, условные обозначения, линии или изображения элементов схемы или графика.

Обучающийся должен по памяти вставить соответствующие элементы в указанные места («пропуски»).

– **установление соответствия** – в данном случае обучающемуся предлагают два списка, между элементами которых следует установить соответствие;

– **установление последовательности** – предполагает необходимость установить правильную последовательность предлагаемого списка слов или фраз.

Примерный тест

Компетенции, формируемые при изучении дисциплины:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-6. Способен анализировать и разрабатывать организационно-технические и экономические процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования.

Семестр 1

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

1. Установите соответствие между свойствами определителей и их формулировками.

Свойство определителя	Формулировка
1. Определитель транспонированной матрицы	A. Равен нулю.
2. Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками/столбцами	B. Изменяет знак на противоположный.
3. Определитель произведения матриц	C. Равен определителю исходной матрицы.
4. Перестановка двух строк/столбцов в матрице	D. Равен произведению определителей этих матриц.

Ответ: 1-C; 2-A; 3-D, 4-B

2. Установите соответствие между термин с его математическим определением.

Термин	Математическое определение
1. Мнимая единица	A. Число вида $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$
2. Комплексное число	B. Число, удовлетворяющее равенству $i^2 = -1$
3. Сопряженное число	C. Для $z = a + bi$ равно $a - bi$
4. Модуль числа	D. Для $z = a + bi$ равно $\sqrt{a^2 + b^2}$

Ответ: 1-B; 2-A; 3-C; 4-D

3. Установите соответствие между формой уравнения прямой и ее общим видом.

Форма уравнения прямой	Общий вид уравнения
1. Общее уравнение прямой	A. $y = kx + b$
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом	B. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
3. Уравнение прямой, проходящей через две точки	C. $Ax + By + C = 0$
4. Уравнение прямой в отрезках	D. $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору	E. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Ответ: 1-C; 2-A; 3-D, 4-E, 5-B

4. Выполните деление многочлена $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 3$ на многочлен $S(x) = x + 2$. Частное от этого деления равно:

1. $2x^2 - 3x + 1$
2. $2x^2 + 5x - 15$
3. $2x^2 - 3x + 11$
4. $2x^2 + 5x + 5$

Ответ: 1

5. Упорядочите следующие шаги вычисления определителя для матрицы 3×3 .

1. Выберите столбец для разложения.
2. Определите миноры для выбранного столбца.
3. Сложите все полученные значения
4. Умножьте каждый элемент выбранного столбца на соответствующий алгебраическое дополнение.

Ответ: 1, 2, 4, 3

6. Пусть даны векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$. Расположите шаги проверки их коллинеарности в правильном порядке:

1. Если хотя бы одна из координат равна нулю, проверить, равна ли соответствующая координата другого вектора нулю.
2. Записать условие пропорциональности координат: $x_1/x_2 = y_1/y_2 = z_1/z_2$ (если соответствующие координаты не равны нулю).
3. Проверить выполнение условия пропорциональности для всех соответствующих координат.
4. Сделать вывод о коллинеарности: если условие пропорциональности выполняется для всех координат или соответствующие нулевые координаты совпадают, векторы коллинеарны, иначе - нет.

Ответ: 2, 3, 1, 4

7. Вставьте пропущенные слова.

Если дискриминант приведенного уравнения 3-й степени положителен ($\frac{D}{4} > 0$), то уравнение имеет _____.

Ответ: один действительный и два сопряженных комплексных корня.

8. Вставьте пропущенное слово.

Если два вектора коллинеарны, то их координаты _____.

Ответ: Пропорциональны.

9. Вычислите аргумент комплексного числа $z = -1 + i$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$ (или 135 гр). Аргумент комплексного числа определяется с учетом квадранта, в котором оно расположено. Для $z = -1 + i$ (II квадрант) к результату арктангенса

добавляется π .

10. Вставьте пропущенные слова.

Определитель матрицы, содержащей хотя бы одну строку (или столбец), полностью состоящую из нулей, равен _____.

Ответ: 0

11. Вставьте пропущенные слова.

Если определитель матрицы A равен 5, а определитель матрицы B равен 2, то определитель матрицы $A \cdot B$ равен _____.

Ответ: 10

12. Если (x_0, y_0, z_0) – решение системы
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$
 то значение $x_0 + y_0 + z_0$ равно _____.

Ответ: 3

13. Какое условие необходимо и достаточно для коллинеарности двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$? Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (скалярное произведение равно нулю)
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (векторное произведение равно нулевому вектору)
3. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (равенство длин векторов)
4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ (сумма векторов равна нулевому вектору)

Ответ: 2.

Обоснование. Векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулевому вектору. Это связано с тем, что площадь параллелограмма, построенного на коллинеарных векторах, равна нулю.

14. Вершинами пирамиды служат точки $A(1; 2; 3)$, $B(0; -1; 1)$, $C(2; 5; 2)$ и $D(3; 0; -2)$. Найдите объем пирамиды.

Решение: Находим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-1; -3; -2), \vec{b} = \overrightarrow{AC} = (1; 3; -1), \vec{c} = \overrightarrow{AD} = (2; -2; -5),$$

Находим $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-17) + 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-8) = 17 - 9 + 16 = 24$$

$$\text{Следовательно, } V = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$$

Ответ: 4

15. При решении системы n линейных уравнений с n переменными можно воспользоваться формулами Крамера, если ...

Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор:

1. один из столбцов матрицы коэффициентов является линейной комбинацией остальных;
2. столбцы матрицы коэффициентов линейно независимы;

3. определитель матрицы коэффициентов не равен нулю;

4. строки матрицы коэффициентов линейно зависимы.

Ответ: 3.

Обоснование Выбор следует из формул Крамера $x = \frac{\det A_i}{\det A}$, так как на ноль делить нельзя, то определитель матрицы коэффициентов не должен быть равен нулю.

Семестр 2

16. Установите соответствие между основными понятиями линейных операторов и их определениями/свойствами.

Понятие	Определение/Свойство
1. Линейный оператор	A. Множество всех векторов, которые линейный оператор переводит в нулевой вектор.
2. Ядро линейного оператора	B. Функция (отображение) между векторными пространствами, сохраняющая операции сложения и умножения на скаляр.
3. Образ линейного оператора	C. Множество всех векторов, которые получаются в результате применения линейного оператора ко всем векторам исходного пространства.
4. Матрица линейного оператора в данном базисе	D. Таблица чисел, определяющая действие линейного оператора в заданном базисе.

Ответ: 1-B, 2-A, 3-C, 4-D

17. Установите соответствие между свойствами операторов (в унитарном пространстве) и их описанием.

Свойство	Описание
1. Собственные значения самосопряженного оператора	A. Имеют модуль, равный 1 (лежат на единичной окружности).
2. Собственные значения унитарного оператора	B. Вещественные числа.
3. Собственные векторы нормального оператора, соответствующие разным собственным значениям	C. Ортогональны.

Ответ: 1-B, 2-A, 3-C

18. Установите соответствие между понятиями и их описаниями (Примеры в R^2 и R^3).

Понятия	Описание
1. Стандартное скалярное произведение в R^2 .	A. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
2. Стандартный ортонормированный базис в R^3 .	B. $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$, где $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ - векторы в R^2 .
3. Получение следующего	C. $x_1 y_1 + x_2 y_2$, где $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ -

вектора ортогональной системы R^2 .	векторы в R^2 .
---------------------------------------	-------------------

Ответ: 1-С, 2-А, 3-В

19. Для квадратичной формы $Q_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ необходимо составить её матрицу A в стандартном базисе.

Расположите следующие шаги алгоритма в правильном порядке:

1. Диагональный элемент a_{ii} положить равным коэффициенту при x_i^2 .
2. Внедиагональный элемент a_{ij} (где $i \neq j$) положить равным **половине** коэффициента при смешанном произведении $x_i x_j$.
3. Выписать все переменные: x_1, x_2, x_3 .
4. Записать полученную симметричную матрицу $A = (a_{ij})$.
5. Построить заготовку матрицы 3×3 .

Ответ: 3, 5, 1, 2, 4

20. Расположите действия в правильном порядке для приведения квадратичной формы к каноническому виду **методом Лагранжа** (выделение полных квадратов):

1. Выделить полный квадрат относительно одной из переменных (например, x_1).
2. Выполнить линейную замену переменных, чтобы избавиться от перекрестных членов, содержащих эту переменную.
3. Записать квадратичную форму в каноническом виде.
4. Повторить шаги А и В для оставшихся переменных, пока квадратичная форма не станет канонической.

Ответ: 1, 2, 4, 3

21. Расположите действия в правильном порядке для определения типа поверхности второго порядка после приведения ее уравнения к каноническому виду.

1. Проанализировать знаки коэффициентов при квадратах переменных в каноническом уравнении.
2. Записать каноническое уравнение поверхности.
3. Определить тип поверхности на основе анализа коэффициентов (например, эллипсоид, гиперболоид, параболоид и т.д.).

Ответ: 2, 1, 3

22. Вставить пропущенные слова.

Линейное пространство называется бесконечномерным, если в нем существует любое число _____ элементов.

Ответ: линейно независимых.

23. Вставить пропущенное слово.

Геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (_____) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная и равная ε , называется 1) эллипсом, если $\varepsilon < 1$; 2) гиперболой, если $\varepsilon > 1$ 3) параболой, если $\varepsilon = 1$.

Ответ: фокуса.

24. Вставить пропущенное слово.

Данное уравнение $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ определяет _____.

Ответ: эллипс.

25. Пусть линейный оператор f двумерного пространства в базисе e_1, e_2 задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $f(x)$, если $x = 3e_1 - 2e_2$

Решение.

Составляем матрицу-столбец из координат вектора x в базисе e_1, e_2 : $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ тогда как $Y = AX$, имеем $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$. Итак, $f(x) = 3e_1 - 7e_2$

Ответ: $f(x) = 3e_1 - 7e_2$

26. Составить уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси Oy и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

Решение.

Искомое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Согласно условию $2c=10$, $c=5$; $2b=8$, $b=4$.

Из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$ найдем мнимую полуось a : $25 = a^2 + 16$, $a^2 = 9$, $a = 3$.

Получаем $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ - уравнение гиперболы.

Ответ: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

27. Составить уравнение сферы с центром в точке $M(-5; 3; 2)$ и касающейся плоскости $2x - 2y + z - 4 = 0$.

Решение.

Для составления уравнения сферы нужен ее радиус. В данном случае R - расстояние от точки M до плоскости: $R = \frac{|-5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = 6$.

Искомое уравнение: $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 36$

Ответ: $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 36$

28. Какое из следующих утверждений о связи между матрицей линейного оператора и его свойствами *всегда* верно? **Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.**

1. Определитель матрицы линейного оператора равен сумме его собственных значений.

2. След матрицы линейного оператора равен произведению его собственных значений.
3. Матрица линейного оператора всегда диагонализируема.
4. Ранг матрицы линейного оператора равен размерности его образа.
5. Дефект матрицы линейного оператора равен размерности его ядра.

Ответ: 4, 5. Обоснование. 4. Это фундаментальное соотношение в линейной алгебре. Ранг матрицы отражает число линейно независимых столбцов, которые образуют базис образа оператора. 5. Это также фундаментальное соотношение. Дефект плюс ранг равно размерности пространства, из которого действует оператор (теорема о ранге и дефекте).

29. Какое из следующих утверждений верно для матрицы квадратичной формы?
Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.

1. Матрица всегда диагональна.
2. Матрица всегда симметрична.
3. Матрица всегда верхнетреугольная.
4. Матрица может быть любой квадратной матрицей.
5. Матрица определяется однозначно для данной квадратичной формы.

Ответ: 2. Обоснование. Её элементы связаны с коэффициентами при квадратах переменных и произведениях переменных. Симметричность обеспечивается тем, что коэффициенты при $x_i x_j$ и $x_j x_i$ одинаковы.

30. Что происходит с уравнением кривой второго порядка при параллельном переносе системы координат? **Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.**

1. Меняется тип кривой.
2. Меняются только коэффициенты при линейных членах и свободный член.
3. Меняются только коэффициенты при квадратичных членах.
4. Кривая исчезает.
5. Меняется только свободный член.

Ответ: 2. Обоснование. При параллельном переносе системы координат изменяются только коэффициенты при линейных членах и свободный член, а коэффициенты при квадратичных членах остаются неизменными. Это означает, что тип кривой не меняется.

ОПК-6. Способен анализировать и разрабатывать организационно-технические и экономические процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования.

1 семестр

1. Установите соответствие между способами вычисления определителя и типом матрицы.

Способ вычисления определителя	Тип матрицы
1. Правило треугольников (или правило Саррюса)	A. Диагональная матрица
2. Разложение по строке/столбцу	B. Матрица 2x2
3. Перемножение элементов главной диагонали	C. матрица 3x3

4. Приведение к треугольному виду	D. Матрица $n \times n$ (где $n > 3$)
-----------------------------------	--

Ответ: 1-С; 2-D, 3-A, 4-B

2. Установите соответствие между понятиями и их определениями.

Понятие	Определение
1. Линейная комбинация векторов	A. Множество всех линейных комбинаций заданных векторов.
2. Линейная зависимость векторов	B. Векторы, не являющиеся линейно зависимыми.
3. Линейная независимость векторов	C. Выражение вида $\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n$, где α_i - скаляры.
4. Базис линейного пространства	D. Минимальный набор линейно независимых векторов, через которые можно выразить любой вектор в пространстве.
5. Размерность линейного пространства	E. Количество векторов в базисе этого пространства.
6. Линейная оболочка векторов	F. Существование нетривиального набора скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ таких, что $\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n = \vec{0}$

Ответ: 1-С; 2-F; 3-B, 4-D, 5-E, 6-A

3. Установите соответствие между данной матрицей и обратной ей матрицей.

Данная матрица	Обратная матрица
1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	A. $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	B. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	C. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	D. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Ответ: 1-С; 2-D, 3-A, 4-B

4. Расположите шаги в правильном порядке для вывода формул Виета для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

1. Записать уравнение в виде $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
2. Сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x
3. Представить многочлен в виде $(x - x_1)(x - x_2) = 0$
4. Раскрыть скобки: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$
5. Получить формулы: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

Ответ: 1, 3, 4, 2, 5

5. Расположите шаги вычисления векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ в правильном порядке, если векторы заданы своими координатами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$.

1. Записать векторное произведение в виде определителя, где первая строка - базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, вторая строка - координаты вектора $\vec{a}$, третья строка - координаты вектора $\vec{b}$.
2. Разложить определитель по первой строке, вычислив соответствующие миноры.
3. Вычислить компоненты векторного произведения:
 - $x = (y_1 z_2 - z_1 y_2)$
 - $y = -(x_1 z_2 - z_1 x_2)$
 - $z = (x_1 y_2 - y_1 x_2)$
4. Записать результат в виде вектора: $\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \cdot \vec{i} + (x_1 z_2 - z_1 x_2) \cdot \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot \vec{k}$ или $\vec{a} \times \vec{b} = (x, y, z)$.

Ответ: 1, 2, 3, 4

6. Пусть прямая задана направляющим вектором $\vec{d}(l, m, n)$ и плоскость задана нормальным вектором $\vec{n}(A, B, C)$. Расположите шаги проверки параллельности прямой и плоскости в правильном порядке:

1. Вычислить скалярное произведение направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости: $\vec{d} \cdot \vec{n} = Al + Bm + Cn$.
2. Если скалярное произведение равно нулю ($Al + Bm + Cn = 0$), то прямая и плоскость параллельны или прямая лежит в плоскости.
3. Проверить, лежит ли прямая в плоскости. Для этого взять любую точку на прямой (например, (x_1, y_1, z_1) из параметрических уравнений прямой) и подставить ее координаты в уравнение плоскости. Если уравнение плоскости выполняется, то прямая лежит в плоскости; если не выполняется, то прямая параллельна плоскости, но не лежит в ней.

Ответ: 1, 2, 3

7. Вставьте пропущенное слово.

Любое комплексное число $a + bi$ является алгебраическим _____ степени.

Ответ: второй.

8. Вставьте пропущенные слова.

Длина векторного произведения двух векторов равна _____, построенного на этих векторах.

Ответ: Площади параллелограмма.

9. Результат возведения в степень комплексного числа $(2(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}))^{10}$ равен _____.

Ответ: 1024.

10. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ равен _____.

Ответ: 2.

11. Исследовать на совместность систему $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 3y = -2. \end{cases}$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $r(A) = 1$,
 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $r(\overline{A}) = 2$ ($\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$).

Таким образом, $r(A) \neq r(\overline{A})$, следовательно система несовместна

Ответ: система несовместна

12. Сколько комплексных корней имеет данное уравнение $x^3 - 9x + 28 = 0$. Укажите количество корней, содержащих мнимую единицу. **Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.**

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

Ответ: 3. Обоснование: Найдем дискриминант данного уравнения: $\frac{D}{4} = \sqrt{\frac{28^2}{4} + \frac{(-9)^3}{27}} = 13 > 0$, так как дискриминант больше нуля, то уравнение имеет один действительный и два комплексных сопряженных корня.

13. Если определитель матрицы равен нулю, то что можно сказать о ее строках (или столбцах)? **Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.**

1. Они линейно независимы
2. Они линейно зависимы
3. Матрица является единичной
4. Матрица не имеет обратной

Ответ: 2.

Обоснование. Если определитель матрицы равен нулю, это означает, что ее строки (или столбцы) линейно зависимы. Это важное следствие из теории определителей и линейной алгебры.

14. Для решения каких систем используются формулы Крамера? **Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.**

1. Любой системы линейных уравнений
2. Только совместных систем
3. Только определенной системы, у которой определитель основной матрицы не равен нулю
4. Только однородных систем

Ответ: 3.

Обоснование. Формулы Крамера применимы только к определенным системам, у которых количество уравнений равно количеству переменных, и определитель основной матрицы отличен от нуля.

15. Какое условие необходимо и достаточно для компланарности трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? **Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.**

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ((произведение длин векторов равно нулю))

2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ (векторное произведение двух векторов равно третьему)
3. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ (смешанное произведение равно нулю)
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{0}$ (сумма векторов равна нулевому вектору)

Ответ: 3.

Обоснование. Смешанное произведение трех компланарных векторов равно нулю. Геометрически это означает, что объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен нулю.

Семестр 2

16. Установите соответствие операции над линейными операторами и их свойствами/определениями.

Операция	Свойство/Определение
1. Сложение линейных операторов	A. Оператор, который “компенсирует” действие исходного оператора, возвращая вектор к исходному состоянию.
2. Умножение линейного оператора на скаляр	B. Результатом является линейный оператор, действующий как $(F+G)(v) = F(v) + G(v)$.
3. Композиция (произведение) линейных операторов	C. Результатом является линейный оператор, действующий как $(\alpha F)(v) = \alpha(F(v))$.
4. Обратный оператор	D. Результатом является линейный оператор, последовательно применяющий сначала один оператор, затем другой.

Ответ: 1-B, 2-C, 3-D, 4-A

17. Установите соответствие между основными понятиями и их определениями/свойствами.

Понятие	Свойство/Определение
1. Евклидово пространство	A. Функция, отображающая пару векторов в поле скаляров (действительных или комплексных чисел), удовлетворяющая определенным аксиомам.
2. Унитарное пространство	B. Векторное пространство над полем действительных чисел, в котором определено скалярное произведение.
3. Скалярное произведение	C. Квадратный корень из скалярного произведения вектора на себя.
4. Норма (длина) вектора	D. Векторное пространство над полем комплексных чисел, в котором определено скалярное произведение.

Ответ: 1-B, 2-D, 3-A, 4-C

18. Установите соответствие между основными понятиями и их свойствами (Матрицы в евклидовом пространстве).

Понятие	Свойство
1. Матрица Грама	A. Матрица, строки которой представляют собой координаты образов базисных векторов в некотором ортонормированном базисе, и транспонированная матрица равна ей самой.

2. Матрица ортогонального оператора	В. Матрица, элементы которой равны скалярным произведениям векторов из некоторой системы.
3. Матрица самосопряженного (симметричного) оператора	С. Матрица, транспонированная к которой равна обратной.

Ответ: 1-В, 2-С, 3-А

19. Расставьте шаги алгоритма вычисления длины (нормы) вектора в евклидовом пространстве, зная его координаты в ортонормированном базисе в правильном порядке:

1. Возвести в квадрат каждую координату вектора.
2. Суммировать квадраты координат.
3. Извлечь квадратный корень из полученной суммы.
4. Записать координаты вектора в ортонормированном базисе.

Ответ: 4, 1, 2, 3

20. Расположите следующие уравнения в порядке возрастания сложности формы (от простой параболической формы к сложной гиперболической):

1. $y = x^2 + 3x - 7$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$
4. $x = y^2 - 4y + 8$
5. $3x^2 + y^2 = 16$

Ответ: 1, 4, 2, 5, 3

21. Расположите по порядку этапы анализа конкретной квадратичной формы:

1. Определение её ранга и сигнатуры.
2. Представление формы в виде суммы квадратов с коэффициентами.
3. Исследование ее свойств и возможности приведения к диагональному виду.
4. Использование формы для определения свойств геометрических объектов.

Ответ: 2, 3, 1, 4

22. Вставить пропущенные слова.

_____ называется множество точек M (на плоскости), сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 этой плоскости равно заданному положительному числу $2a$: $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Ответ: Эллипсом.

23. Вставить пропущенные слова.

Прямая, от которой равноудалены все точки, лежащие на параболе – это _____

Ответ: Директриса параболы.

24. Приведите примеры не менее трех преобразований, которые сохраняли бы форму.

Ответ: Поворот системы координат. Зеркальное отражение. Ортогональное преобразование.

25. Сумма координат фокуса параболы $y = -2x^2 + 8x - 5$ равна _____.

Ответ: 4,875

26. Найти характеристический многочлен матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

В соответствии с определением характеристического многочлена получаем: $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$ - характеристический многочлен матрицы A.

Ответ: $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$ - характеристический многочлен матрицы A.

27. Какая из следующих матриц соответствует нулевому линейному оператору? Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.

1. Матрица, все элементы которой равны нулю.
2. Матрица, единичная на главной диагонали.
3. Произвольная матрица.
4. Матрица, все элементы которой равны единице.

Ответ: 1. Обоснование. Нулевой оператор отображает любой вектор в нулевой вектор; его матрица — нулевая матрица.

28. Какая из следующих характеристик принадлежит квадратичной форме? Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.

1. Линейность по каждому аргументу.
2. Гомогенность степени
3. Нелинейность.
4. Отсутствие квадратичных членов.

Ответ: 2. Обоснование. Квадратичная форма - это гомогенная функция степени 2, то есть $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$.

29. Какой из следующих операторов *всегда* сохраняет длины векторов в евклидовом пространстве? Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.

1. Самосопряженный оператор.
2. Ортогональный оператор.
3. Проектор.
4. Оператор, умножающий все векторы на скаляр 2.

5. Нулевой оператор.

Ответ: 2. Обоснование. Ортогональный оператор *по определению* сохраняет длины векторов, а также углы между векторами (и скалярное произведение).

30. Какой из следующих вариантов правильно определяет свойство операторного многочлена? Выберите правильный ответ и обоснуйте свой выбор.

1. $P(L+M)=P(L)+P(M)$.
2. $P(cL)=cP(L)$ для скалярного c .
3. $P(L_1+L_2)=P(L_1)+P(L_2)$ при условии коммутативности операторов L_1 и L_2 .
4. Ни одно из вышеуказанных.

Ответ: 3. Обоснование. Многочлен операторов сохраняет свойства при условии, что операторы коммутируют, например, в случае дифференциальных операторов. В общем случае, сложение операторов не позволяет простым образом распределять многочлен.

Критерии оценки знаний при проведении тестирования

Отметка «**отлично**» выставляется при условии правильного ответа не менее чем 85% тестовых заданий;

Отметка «**хорошо**» выставляется при условии правильного ответа не менее чем 70 % тестовых заданий;

Отметка «**удовлетворительно**» выставляется при условии правильного ответа не менее 50 %;

Отметка «**неудовлетворительно**» выставляется при условии правильного ответа менее чем на 50 % тестовых заданий.

Результаты текущего контроля используются при проведении промежуточной аттестации